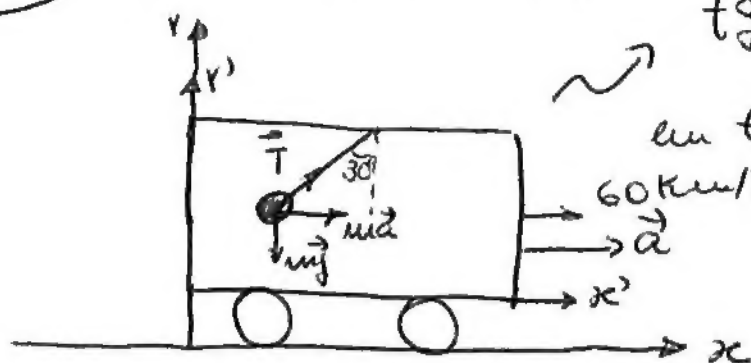


4.121 A.DIR PÁG 147

224



$$\tan 30^\circ = \frac{ma}{mg} \Rightarrow a_t^s = 5,658 \text{ m/s}^2$$

em $t=0 \rightarrow$ instante em que a corda é cortada.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{cte} \Rightarrow \vec{a} dt = d\vec{v} \Rightarrow \vec{a}(t-t_0) = \vec{v} - \vec{v}_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t-t_0) = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}_0 dt + \vec{a}(t-t_0) dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t-t_0)^2$$

$$t_0 = 0 \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a} t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \\ z = z_0 + v_{0z} t + \frac{1}{2} a_z t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A^b = x_{0A}^b + v_{0x}^b t + \frac{1}{2} a_{x^b}^b t^2 \\ y_A^b = y_{0A}^b + v_{0y}^b t + \frac{1}{2} a_{y^b}^b t^2 \\ z_A^b = z_{0A}^b + v_{0z}^b t + \frac{1}{2} a_{z^b}^b t^2 \end{cases}$$

desprezando z (situação coplanar)

A - massa (m)

b - solo (s)

$$\Rightarrow \begin{cases} x_m^s = x_{0m}^s + v_{0x}^s t + \frac{1}{2} a_{x^s}^s t^2 \\ y_m^s = y_{0m}^s + v_{0y}^s t + \frac{1}{2} a_{y^s}^s t^2 \end{cases}$$

da segunda equação vem:

225

$$v_m^s - v_{0m}^s = \frac{1}{2} a_m^s t^2$$

$$-2 = -\frac{g}{2} t^2 \quad \text{sendo } g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t \approx 0,64 \text{ s}}}$$

e pela primeira equação:

$$x_m^s - x_{0m}^s = +\frac{60}{3,6} \cdot 0,64 \Rightarrow \Delta x_{\text{solto}} \approx \underline{\underline{10,7 \text{ m}}}$$

~~MAKAM~~. sendo $\Delta x_{\text{solto}} > 0 \Rightarrow x_m^s > x_{0m}^s$ (como esperava-se)

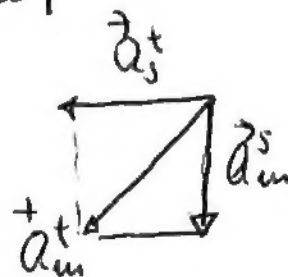
sendo agora

$$\begin{aligned} \text{A - massa (m)} & \quad \left\{ \begin{aligned} x_m^t &= x_{0m}^t + \cancel{v_{0m}^t t} + \frac{1}{2} a_m^t \cdot t^2 \\ v_m^t &= v_{0m}^t + \cancel{v_{0m}^t t} + \frac{1}{2} a_m^t \cdot t^2 \end{aligned} \right. \\ \text{B - trem (t)} & \end{aligned}$$

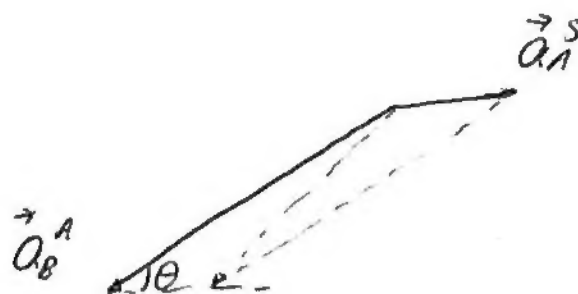
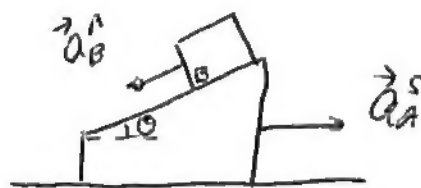
O que o enunciado pede é logo da primeira equação: $|x_m^t - x_{0m}^t|$

$$\cancel{x_m^t - x_{0m}^t} \text{ e temos } \vec{a}_m^t = \vec{a}_m^s + \vec{a}_s^t \rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{a}_m^t| = |\vec{a}_s^t| = 5,658 \text{ m/s}^2$$



$$x_m^t - x_{0m}^t = -\frac{1}{2} 5,658 \cdot (0,64)^2 \Rightarrow |x_m^t - x_{0m}^t| \approx \underline{\underline{1,16 \text{ m}}}$$



$$\vec{v}_B^S = \vec{v}_B^A + \vec{v}_A^S$$

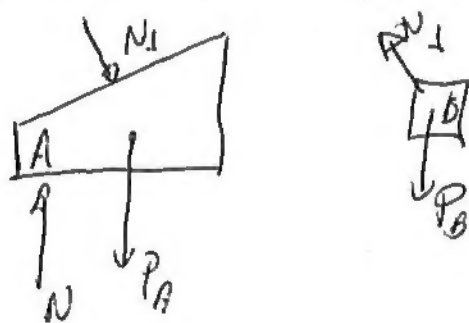
Observe que a componente horizontal de v_B^S é:

$$v_B^A \cos 10^\circ - v_A^S$$

e que a componente vertical é:

$$v_B^A \sin 10^\circ \downarrow$$

Diagrama do corpo livre



Ob- de acordo com a lei da conservação da quantidade de movimento v_B^S na horizontal está para esquerda.

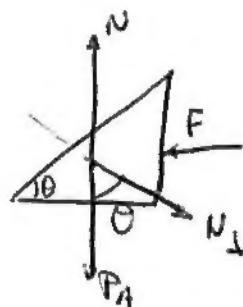
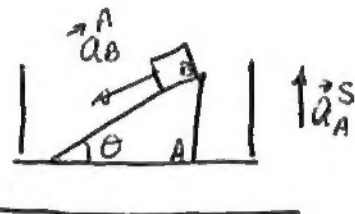
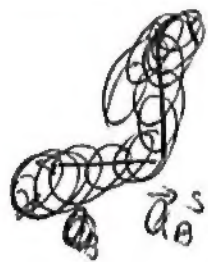
Ob' - Observe que a 1: e a 3: equações representam a conservação da quantidade de movimento na horizontal.

$$\begin{cases} N_1 \sin 10^\circ = m_A v_A^S \\ P_B - N_1 \cos 10^\circ = m_B v_B^A \sin 10^\circ \\ N_1 \cos 10^\circ = m_B (v_B^A \cos 10^\circ - v_A^S) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} v_A^S &= 1,55 \text{ m/s}^2 \rightarrow \\ v_B^A &= 6,25 \text{ m/s}^2 \angle 30^\circ \end{aligned}$$

O que o enunciado pede é a aceleração de B relativa a A sendo B o bloco e A o plano inclinado.

usando a mesma estratégia do problema anterior?

~~Como nos problemas anteriores, vamos considerar o sistema de eixos:~~

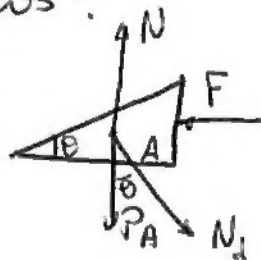
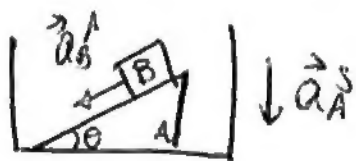


e podemos escrever:

$$\begin{cases} N - P_A - N_1 \cos \theta = m_A a_A^S \\ F = N_1 \sin \theta \\ N_1 \sin \theta = m_B a_B^A \cos \theta \\ N_1 \cos \theta - P_B = m_B (a_A^S - a_B^A \sin \theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_B^A = (a_A^S + g) \sin \theta \\ a_B^A = (a + g) \sin \theta \end{cases}$$

Pl $a = 0 \Rightarrow a_B^A = g \sin \theta$

da mesma forma temos:



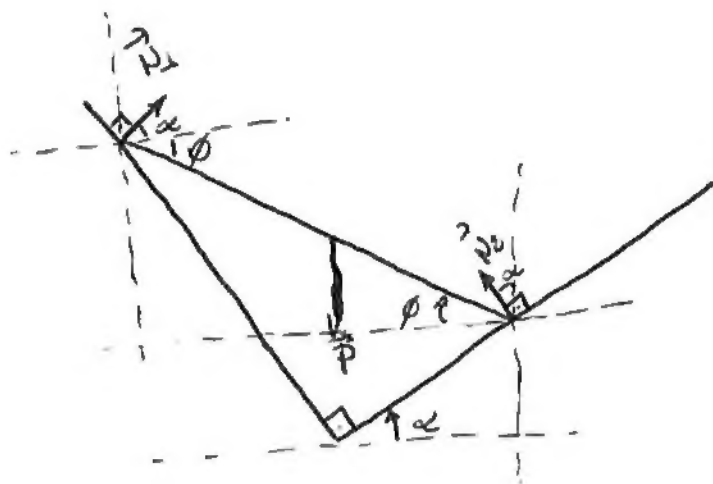
$$\begin{cases} P_A + N_1 \cos \theta - N = m_A a_A^S \\ F = N_1 \sin \theta \\ P_B - N_1 \cos \theta = m_B (a_B^A \sin \theta + a_A^S) \\ N_1 \sin \theta = m_B a_B^A \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_B^A = (g - a_A^S) \sin \theta \\ a_B^A = (g - a) \sin \theta \end{cases}$$

~~Como nos problemas anteriores, vamos considerar o sistema de eixos:~~

se $a > g$ o bloco sobe verticalmente ↑

ALONSO e FINN pág 77

(4.47) Observar o esquema:



N_1 e N_2 são os componentes da base

$$\begin{cases} N_1 \cos \alpha = N_2 \sin \alpha \\ N_1 \sin \alpha + N_2 \cos \alpha = P \end{cases} \Rightarrow \underline{N_1 = P \sin \alpha} \quad \text{e} \quad \underline{N_2 = P \cos \alpha}$$

nas direções indicadas na fig.

Momento em relação ao ponto de atuação de \vec{N}_2
decompondo \vec{N}_1

$$P \frac{\cos \phi}{2} = N_1 \sin(\phi + \alpha) \ell$$

$$\frac{P \cos \phi}{2} = P \sin \alpha \sin(\phi + \alpha)$$

$$\frac{\cos \phi}{2} = \sin \alpha (\sin \phi \cos \alpha + \cos \phi \sin \alpha)$$

$$\cos \phi = \sin 2\alpha \sin \phi + 2 \sin^2 \alpha \cos \phi$$

dividindo ambos os membros por $\cos \phi$:

$$1 = \sin 2\alpha \tan \phi + 2 \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \tan \phi = \frac{1 - 2 \sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha}$$

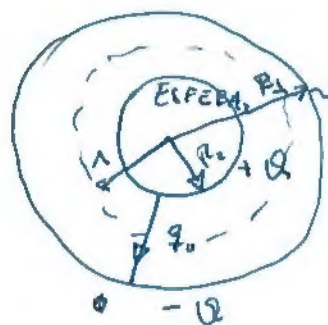
mas

$$\cos(\alpha + \alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan \phi = \underline{\underline{\cotg 2\alpha}}$$

sabemos que $E = \frac{Q^2}{2C}$

Pluma infra vamos calcular o C.



$$Q = CV$$

usando LEI de GAUSS \Rightarrow

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$$E = \frac{F}{q_0} \Rightarrow F = \frac{Q q_0}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

$$W_{if} = \int_{R_2}^{R_1} F dr = \int_{R_2}^{R_1} \frac{Q q_0}{4\pi r^2 \epsilon_0} dr = -\frac{Q q_0}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\Delta V = V_f - V_i = -\frac{W_{if}}{q_0} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$\Rightarrow V = |V_f - V_i| = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{R_1 - R_2}{R_2 R_1} \right)$$

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi \epsilon_0 \left(\frac{R_2 R_1}{R_1 - R_2} \right) = 4\pi \epsilon_0 \frac{R_2}{1 - R_2/R_1}$$

pl a esfera 2 isolada temos $R_1 \gg R_2 \Rightarrow$ 230

$$C = 4\pi\epsilon_0 R_2$$

$$\Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 R$$

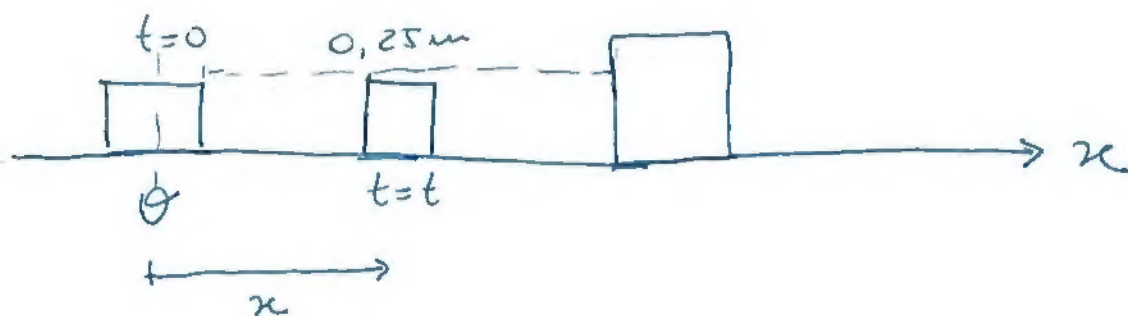
$$Q \quad E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

12.31 M.V.E. edição antiga

$$F \propto \frac{1}{d^2} \Rightarrow F = \frac{K}{d^2} \quad \text{p/ } F = 15 \text{ N} \Rightarrow d = 0,25 \text{ m}$$

logo $K = 0,09375$ em unidades convenientes

$$f = 0,5 \cdot 60 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 = 0,2943 \text{ N}$$



$$\Rightarrow F = \frac{K}{(0,25-x)^2}$$

$$\frac{K}{(0,25-x)^2} - f = ma \quad \text{mas } a = \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{K}{(0,25-x)^2} - f = m v \frac{dv}{dx} \Rightarrow K \int_{x_i}^{x_f} \frac{1}{(0,25-x)^2} dx - f \int_{x_i}^{x_f} dx = m \int_{v_i}^{v_f} v dv$$

$$u = 0,25 - x \quad \frac{du}{dx} = -1 \quad \Rightarrow -K \int_{u_i}^{u_f} \frac{1}{u^2} du - f(x_f - x_i) = \frac{m}{2} (v_f^2 - v_i^2)$$

Observe que o lado direito da última igualdade é ΔE_c logo o lado esquerdo tem que ser W_{net} . Realmente é basta olhar a expressão.

$$K \left(\frac{1}{u_f} - \frac{1}{u_i} \right) - f(x_f - x_i) = \frac{m}{2} (v_f^2 - v_i^2)$$

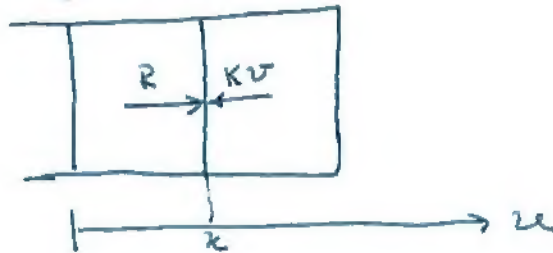
232

$$K \left(\frac{1}{0,25 - x_f} - \frac{1}{0,25 - x_i} \right) - f(x_f - x_i) = \frac{m}{2} (v_f^2 - v_i^2)$$

$$\text{p/ } x_i = 0 ; v_i = 0$$

$$x_f = 0,15 \Rightarrow v_f = 4,156 \text{ m/s} \rightarrow$$

12.32 M.V.E. edição antiga.



$$R - Kv = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{R - Kv}{m} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dt}{m} = \frac{dv}{R - Kv}$$

$$\frac{1}{m} \int_0^t dt = \int_0^v \frac{dv}{R - Kv} \Rightarrow \frac{t}{m} = -\frac{1}{K} \int_{u_0}^{u_f} \frac{du}{u} = -\frac{1}{K} \ln\left(\frac{u_f}{u_0}\right)$$

$$\begin{aligned} u &= R - Kv \\ \frac{du}{dv} &= -K \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad -\frac{Kt}{m} = \ln\left(\frac{R - Kv}{R}\right) \Rightarrow e^{-\frac{Kt}{m}} = 1 - \frac{K}{R} v$$

$$\Rightarrow v = \frac{R}{K} (1 - e^{-\frac{Kt}{m}})$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{R}{m} e^{-\frac{Kt}{m}}$$

(2.33) M.V.E. ~~pag 1~~ edição antiga

$$T_0 = K V_0 \Rightarrow K = \frac{T_0}{V_0}$$

$$F_n = K V_R = m \frac{dv}{dt}$$

$$K(V_0 - v) = m \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{K}{m} dt = \frac{dv}{V_0 - v}$$

$$\frac{K}{m} \int_0^t dt = \int_0^v \frac{dv}{V_0 - v} \quad / \quad \begin{matrix} u = V_0 - v \\ \frac{du}{dv} = -1 \end{matrix}$$

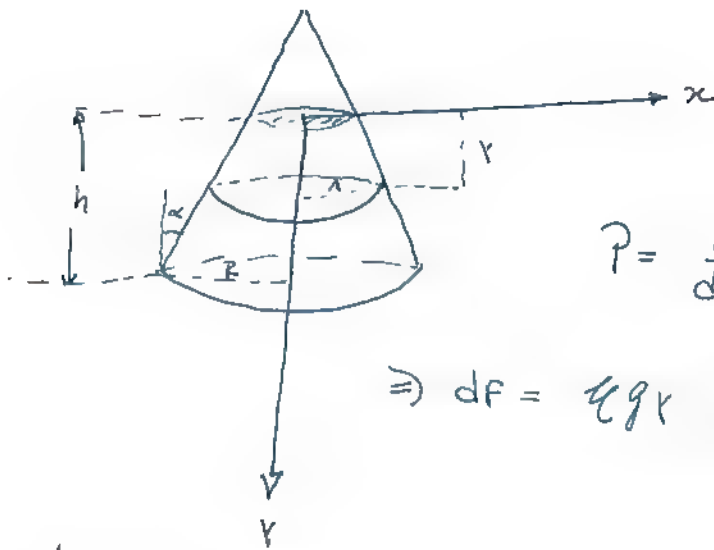
$$\frac{K}{m} t = - \int_{u_0}^{u_f} \frac{du}{u} = - \ln\left(\frac{u_f}{u_0}\right) \Rightarrow -\frac{Kt}{m} = \ln\left(\frac{V_0 - v}{V_0}\right)$$

~~estimar~~ $\Rightarrow t = -\frac{m}{K} \ln\left(\frac{V_0 - v}{V_0}\right)$

para $v = \frac{V_0}{2}$ e $K = \frac{T_0}{V_0}$ vem

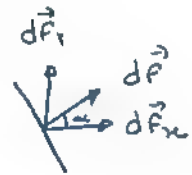
$$t = -\frac{m V_0}{T_0} \ln \frac{1}{2} = \frac{m V_0}{T_0} \ln 2$$

onde V_R módulo da
velocidade relativa
 v velocidade do navio
em relação ao solo

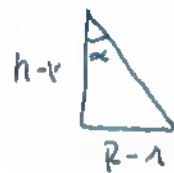


$$P = \frac{dF}{dA} \Rightarrow dF = P dA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dF = \rho g r 2\pi r dr$$



da fig obtusos



$$\Rightarrow r = R + \tan \alpha (y - h)$$

$$dF = 2\pi \rho g r dr (R + \tan \alpha y - \tan \alpha h) = 2\pi R \rho g r dr + 2\pi \rho g \tan \alpha r^2 dr - 2\pi \rho g \tan \alpha h r dr$$

$$\cancel{F} = dF \cos \alpha = dF_y = dF \sin \alpha = 2\pi R \rho g \sin \alpha r dr + 2\pi \rho g \sin \alpha \tan \alpha r^2 dr - 2\pi \rho g \sin \alpha \tan \alpha h r dr$$

$$\Rightarrow F_y = 2\pi R \rho g \sin \alpha \int_0^h r dr + 2\pi \rho g \sin \alpha \tan \alpha \int_0^h r^2 dr - 2\pi \rho g \sin \alpha \tan \alpha h \int_0^h r dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_y = \pi R \rho g \sin \alpha h^2 + \frac{2}{3} \pi \rho g \sin \alpha \tan \alpha h^3 - \pi \rho g \sin \alpha \tan \alpha h^3$$

$$F_y = \pi R \rho g \sin \alpha h^2 - \frac{1}{3} \pi \rho g \sin \alpha \tan \alpha h^3 = \frac{3\pi R \rho g \sin \alpha h^2 - \pi \rho g \sin \alpha \tan \alpha h^3}{3}$$

mas $F_y = P \Rightarrow \rho = \frac{3P}{3\pi R \rho g \sin \alpha h^2 - \pi \rho g \sin \alpha \tan \alpha h^3} = \frac{3P}{\cancel{\rho} \pi g \sin \alpha h^2 (3R - h \tan \alpha)}$

7.82 ALONSO
Pag 189.

$$F = -Kv = ma$$

$$-Kv = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow -\frac{K}{m} dt = \frac{1}{v} dv \Rightarrow -\frac{K}{m} \int_0^t dt = \int_{v_i}^v \frac{1}{v} dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{K}{m} t = \ln\left(\frac{v}{v_i}\right) \Rightarrow \underline{\underline{v = v_i e^{-\frac{K}{m}t}}}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = v_i e^{-\frac{K}{m}t} \Rightarrow v_i \int_0^t e^{-\frac{K}{m}t} dt = \int_0^x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{v_i m}{K} (1 - e^{-\frac{K}{m}t})}}$$

Quando a partícula para $v=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = v_i e^{-\frac{K}{m}t} \Rightarrow \frac{K}{m} \rightarrow \infty \Rightarrow \underline{\underline{x = \frac{v_i m}{K}}}$$

$$v = v_i e^{-\frac{K}{m}t} \text{ para } t = \frac{m}{K} \Rightarrow \underline{\underline{v = \frac{v_i}{e}}}$$

7.83 ALONSO P16189 $\Rightarrow P/a=0 \Rightarrow v_L = \sqrt{F/k} //$ 236

$$F - kv^2 = ma$$

sendo $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$

$$F - kv^2 = m v \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{F - kv^2}{m} = \frac{v dv}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{m} = \frac{v}{F - kv^2} dv \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^x \frac{dx}{m} = \int_{v_0}^v \frac{v}{F - kv^2} dv \quad / \quad \begin{aligned} u &= F - kv^2 \\ \frac{du}{dv} &= -2kv \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{m} = -\frac{1}{2k} \int_{u_0}^{u_F} \frac{du}{u} = -\frac{1}{2k} \ln\left(\frac{u_F}{u_0}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{2kx}{m} = \ln\left(\frac{F - kv^2}{F - kv_0^2}\right) \Rightarrow v^2 = \frac{F}{k} + (v_0^2 - \frac{F}{k}) e^{-\frac{2kx}{m}}$$

nova eq. diferencial

$$-kv^2 = m v \frac{dv}{dx} \Rightarrow -\frac{k}{m} dx = \frac{dv}{v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{k}{m} x = \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) \Rightarrow v = v_0 e^{-kx/m}$$

para $v = \frac{v_L}{e}$ e $v_0 = v_L \Rightarrow x = \frac{m}{k}$

4.6 ALONSO PÁG 71

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i = (400, -150, -300) \text{ kgf.}$$

$$\vec{I}_{\text{FORCAS}} = \vec{I}_R = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 15 \\ 400 & -150 & -300 \end{vmatrix} = (3150, 7200, 600) \text{ kgf.m}$$

↓
pois as
forças são
concomitantes

sempre ocorre
 $\vec{I}_{\text{FORCAS}} = \vec{I}_R$

4.7 ALONSO PÁG 71

$$\vec{I}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 15 \\ -500 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 7500, 1500) \text{ kgf.m.}$$

$$\vec{I}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 15 \\ 0 & -200 & 100 \end{vmatrix} = (2700, -400, -800) \text{ kgf.m.}$$

$$\vec{I}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 15 \\ -100 & 50 & -400 \end{vmatrix} = (450, 100, -100) \text{ kgf.m}$$

$$\vec{I}_{\text{FORCAS}} = \sum_{i=1}^3 \vec{I}_i = (3150, 7200, 600) \text{ kgf.m.}$$

$$\vec{I}_{\text{FORCAS}} \cdot \vec{R} = 400 \times 3150 - 150 \times 7200 - 300 \times 600 = 0$$

49 ALONSO PÁG 73

podemos decompor a força e somar os momentos (vetorialmente).

$$\vec{M}_{F_y} = \vec{0}$$

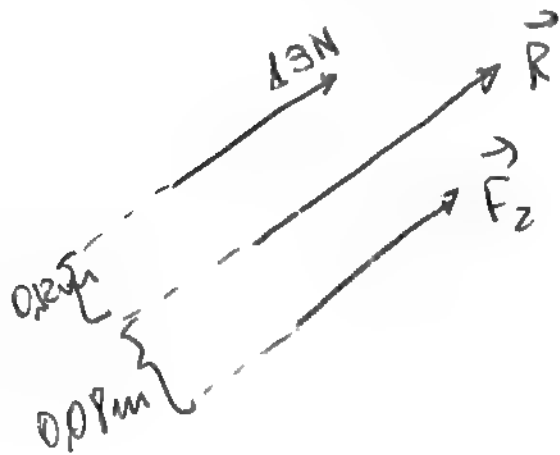
$$|\vec{M}_{F_x}| = 12 \cdot \frac{10}{\sqrt{125}} \times 5 = 53,66 \quad \otimes \rightarrow \text{entrando no plano do papel.}$$

$$\sin \theta = \frac{5}{10} = 0,5$$

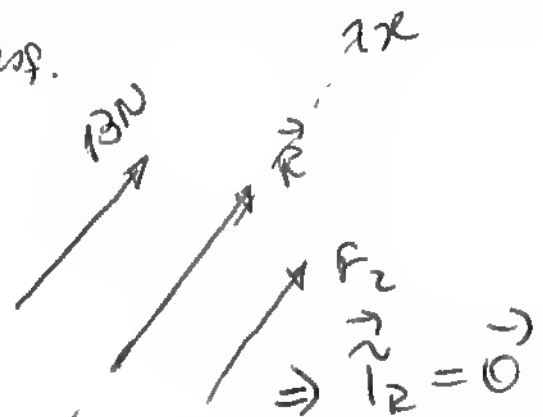
$$V - 5 = 0,5x$$

412 ALONSO PÁG 73

Considere o esquema:

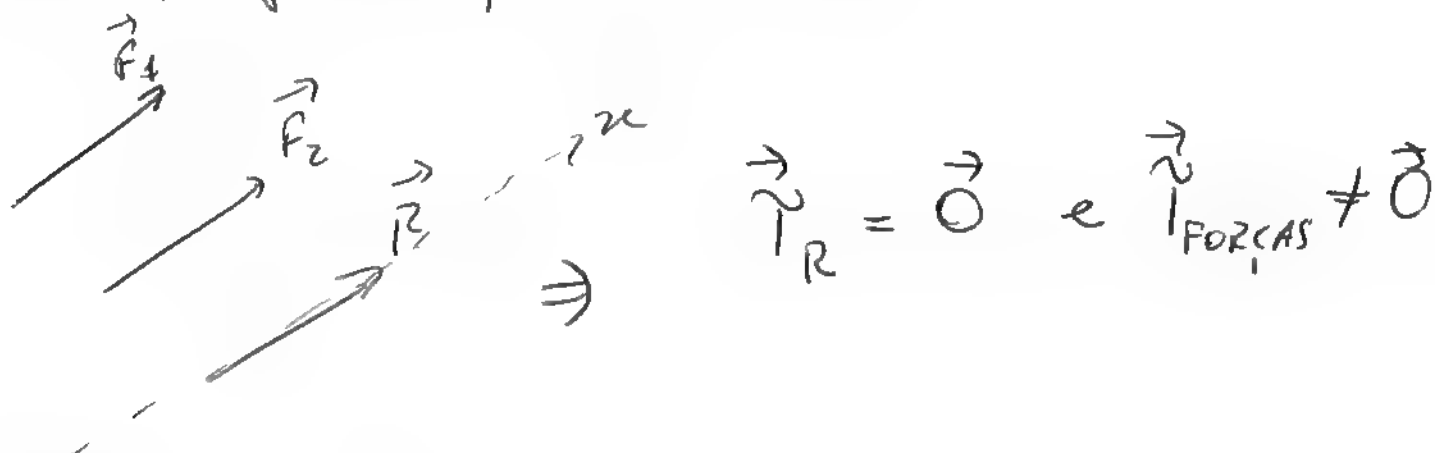


imagine um eixo x conforme o esq.

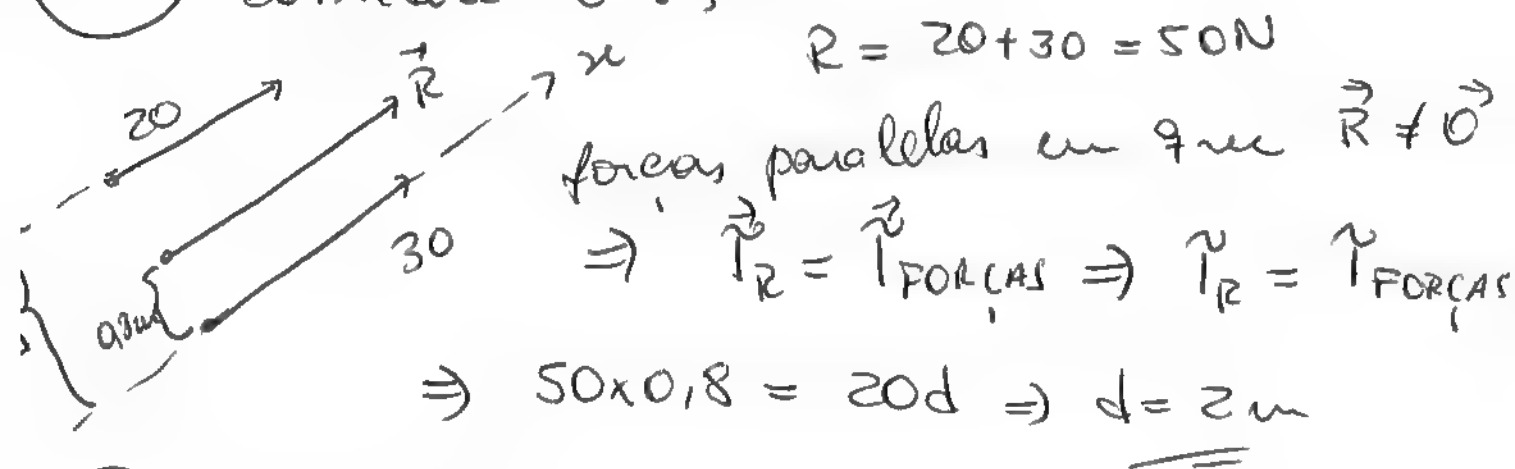


mas para forças paralelas com $\vec{R} \neq \vec{0}$
 $\vec{L}_R = \vec{L}_{\text{FORÇAS}} = \vec{0} \Rightarrow 13 \times 0,12 = F_2 \cdot 0,1$
 $\Rightarrow F_2 = \underline{19,5N}$ e $R = \underline{32,5N}$.

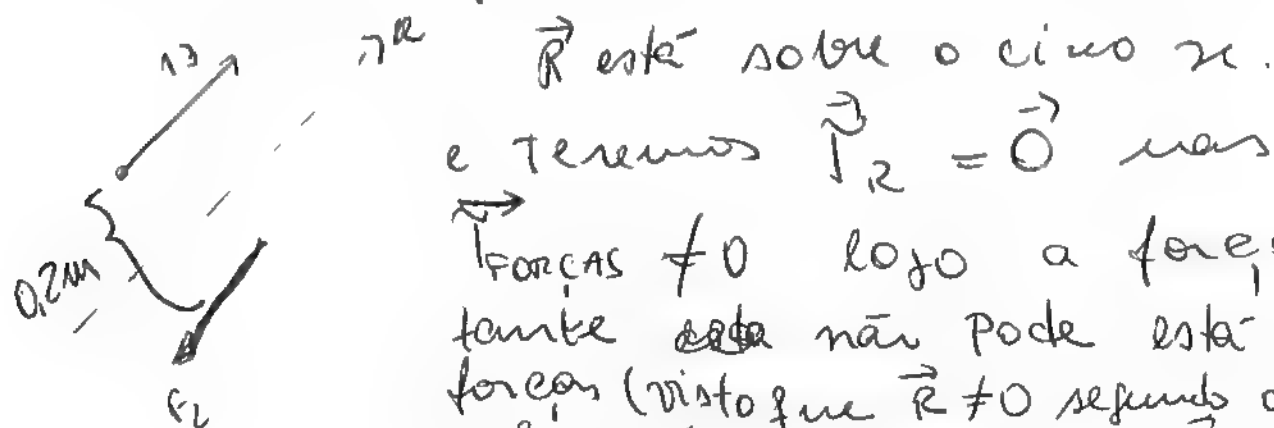
Isto claro que \vec{R} só pode estar entre as forças pois imagine que não este-



4.13 ALONSO PÁG 71
considere o esquema.

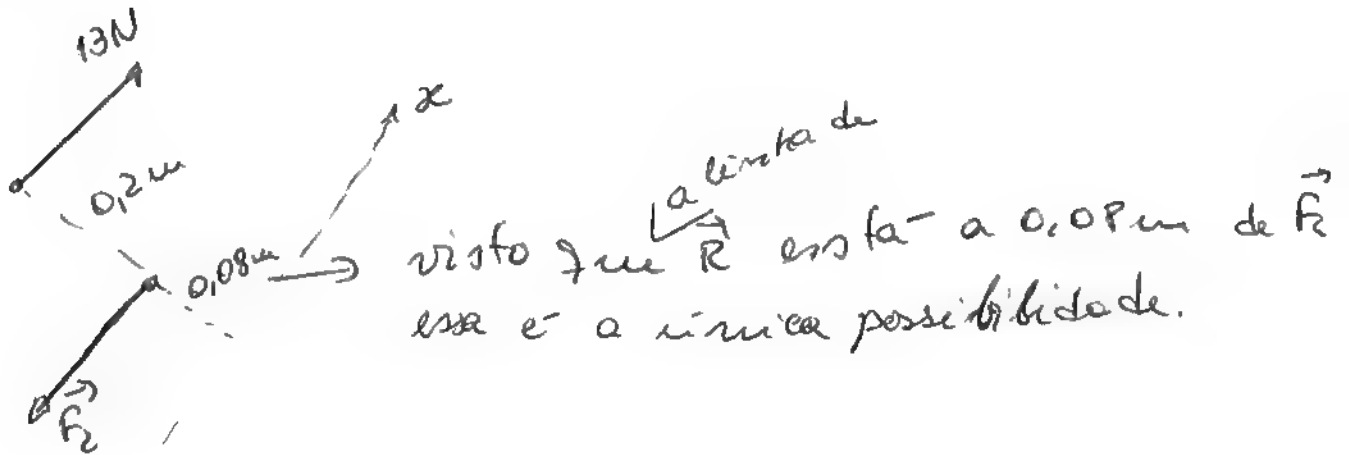


4.14 ALONSO PÁG 71
imagine agora que a resultante este entre as forças



e teremos $\vec{I}_R = \vec{0}$ mas
 $\vec{I}_{FORÇAS} \neq 0$ logo a força resul-
tante ~~esta~~ não pode estar entre as
forças (visto que $\vec{R} \neq 0$ segundo o enunciado
e as forças ~~estão~~ paralelas segue temos $\vec{I}_R = \vec{I}_{FORÇAS}$)
 \rightarrow conforme resolvemos no problema anterior

logo temos

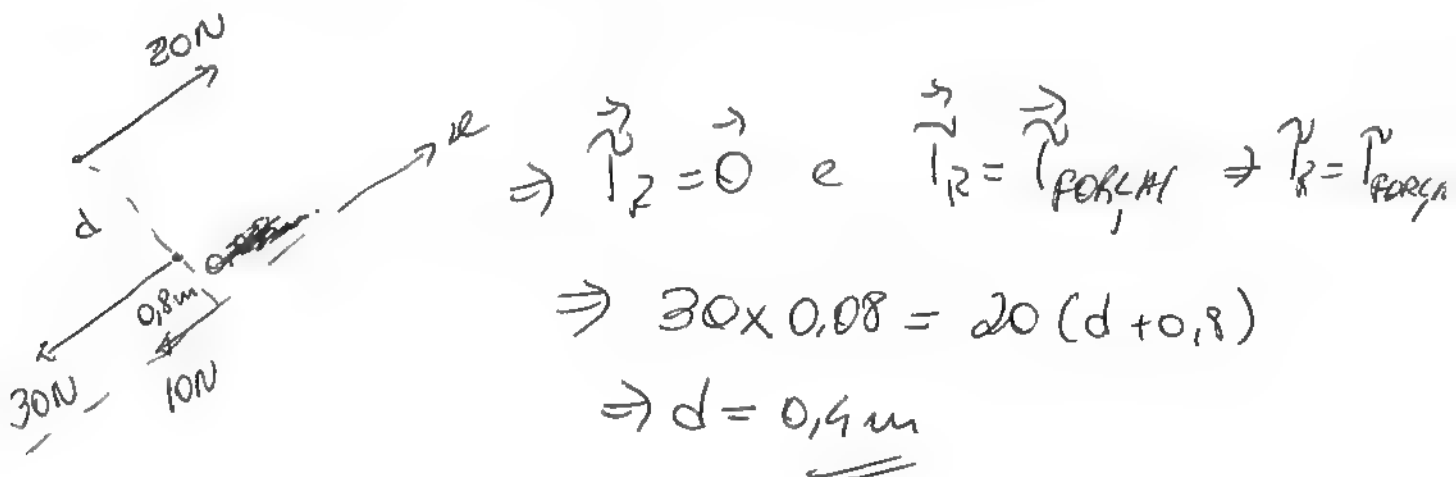


$$\Rightarrow \vec{I}_2 = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{I}_R = \vec{I}_{\text{FORÇAS}} \Rightarrow \vec{I}_R = \vec{I}_{\text{FORÇAS}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13 \times 0,28 = F_2 \cdot 0,08 \Rightarrow F_2 = \underline{\underline{45,5 N}} \text{ e}$$

$$\underline{\underline{R = 32,5 N}} \text{ no mesmo sentido de } \vec{F}_2.$$

conforme o caso anterior temos;



Questão 1

12.63 OBS₁: note de que como foi mostrado no gráfico do livro a força não está definida em $t = \pi/\omega, 2\pi/\omega, \dots$. Portanto a série de Fourier dada p/ F não converge p/ ela nestes pontos. Portanto $F = F_0 (4/\pi) (\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots)$ não é válida p/ $t = \frac{\pi}{\omega}, \frac{2\pi}{\omega}, \dots$. Usava-se jogando $t = \pi/\omega, \frac{2\pi}{\omega}, \dots$ a função a zero obtendo $F=0$ que não é verdade, F não tem valor definido nestes pontos. Portanto a solução dada pelo livro p/ $x(t)$ também não é válida p/ estes pontos.

OBS₂: Vamos modificar a questão dando apenas o gráfico de $F \times t$

Pedindo $x(t)$:

uma partícula de massa m está sujeita a força da fig do livro determine a equação de movimento da partícula sabendo que:

- a) em $t=0$ a partícula está na origem e em $t=\pi/2\omega$ sua velocidade é 5 m/s
- b) em $t=0$ a partícula está na origem e tem velocidade 3 m/s

Solução

$$F = \begin{cases} F_0 & 0 \leq t < \pi/\omega \\ -F_0 & \pi/\omega < t < 2\pi/\omega \end{cases}$$

sendo F periódica fora deste intervalo (logo podemos calcular a série de Fourier de F)

está claro que F tem período $2\pi/\omega$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} F(t) \cos n\pi t \frac{\omega}{\pi} dt \Rightarrow a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} F(t) \cos n\omega t dt$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\omega}{\pi} \left[\int_{-\pi/\omega}^0 -F_0 \cos n\omega t dt + \int_0^{\pi/\omega} F_0 \cos n\omega t dt \right]$$

As - apesar de $t \in (0, +\infty)$ não afeta em nada se considerarmos a função F periódica de $t \in (-\infty, +\infty)$ e utilizarmos o intervalo que quisermos

p/ $n=0 \Rightarrow a_0 = \frac{\omega}{\pi} \left[-F_0 \frac{\pi}{\omega} + F_0 \frac{\pi}{\omega} \right] \Rightarrow a_0 = 0$ (caso deixássemos p/ calcular a_0 na fórmula final não poderíamos já que apareceria alguma coisa tipo 1)

P/ $n = 1, 2, 3, \dots$ podemos escrever:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[-F_0 \frac{1}{nw} \left(\sin 0 - \sin nw \left(-\frac{\pi}{w} \right) \right) + F_0 \frac{1}{nw} \left(\sin \frac{\pi}{w} - \sin 0 \right) \right]$$

$$\Rightarrow a_n = 0 \quad \text{P/ } n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{w}{\pi} \int_{-\pi/w}^{\pi/w} F(t) \sin n \pi t \frac{w}{\pi} dt \quad n = 1, 2, \dots \quad \left(\begin{array}{l} \text{n\~ao precisamos disculinar} \\ b_0 \text{ pois n\~ao usamos } b_0 \\ \text{na s\~erie de Fourier} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{w}{\pi} \left[\int_{-\pi/w}^0 -F_0 \sin n \pi t dt + \int_0^{\pi/w} F_0 \sin n \pi t dt \right]$$

$$b_n = \frac{w}{\pi} \left[+F_0 \frac{1}{nw} (\cos 0 - \cos n\pi) - F_0 \frac{1}{nw} (\cos n\pi - \cos 0) \right]$$

$$b_n = \frac{F_0}{n\pi} [1 - \cos n\pi] - \frac{F_0}{n\pi} [\cos n\pi - 1] = \frac{2F_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{mas } \cos n\pi = (-1)^n \Rightarrow b_n = \frac{2F_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{P/ } n = 2K \quad K = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow b_n = b_{2K} = 0$$

$$\text{P/ } n = 2K-1 \quad K = 1, 2, \dots \Rightarrow b_n = b_{2K-1} = \frac{4F_0}{(2K-1)\pi}$$

$$\Rightarrow \sum_{K=1}^{\infty} \frac{4F_0}{(2K-1)\pi} \sin[(2K-1)\omega t] = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\sin[(2K-1)\omega t]}{2K-1} \quad \text{e' a}$$

s\~erie de Fourier de F

convergiendo p/ $F(t)$ $\forall t$ exceto $t = \pi/\omega, 2\pi/\omega, \dots$

Portanto podemos escrever:

$$F(t) = \frac{4F_0}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right) \text{ válida p/ } \forall t \text{ exceto } t = \pi/\omega, 2\pi/\omega, \dots$$

$$\text{mas } F_R = F(t) = m a$$

$$\Rightarrow \frac{4F_0}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right) = m \ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{4F_0}{\pi m} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \dots \right)$$

$$\text{homogênea } \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = A' \Rightarrow dx = A' dt \Rightarrow x_h = A't + B'$$

onde A', B', C', \dots são ctes.

$$\ddot{x} = \frac{4F_0}{\pi m} \sin \omega t \quad \text{vamos tentar } x_{p1} = C' \sin \omega t + D' \cos \omega t$$

$$\dot{x}_{p1} = C' \omega \cos \omega t - D' \omega \sin \omega t \quad \ddot{x}_{p1} = -C' \omega^2 \sin \omega t - D' \omega^2 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow -C' \omega^2 \sin \omega t - D' \omega^2 \cos \omega t = \frac{4F_0}{\pi m} \sin \omega t$$

$$\Rightarrow D' = 0 \quad -C' \omega^2 = \frac{4F_0}{\pi m} \Rightarrow C' = -\frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \Rightarrow x_{p1} = -\frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \sin \omega t$$

$$\ddot{x} = \frac{4F_0}{\pi m} \frac{1}{3} \sin 3\omega t \quad x_{p2} = E' \sin 3\omega t + F' \cos 3\omega t$$

$$\Rightarrow \dot{x}_{p2} = 3\omega E' \cos 3\omega t - 3\omega F' \sin 3\omega t \quad \ddot{x}_{p2} = -9\omega^2 E' \sin 3\omega t - 9\omega^2 F' \cos 3\omega t$$

$$\Rightarrow -9\omega^2 E' \sin 3\omega t - 9\omega^2 F' \cos 3\omega t = \frac{4F_0}{\pi m} \frac{1}{3} \sin 3\omega t \Rightarrow F' = 0 \text{ e } E' = -\frac{1}{3} \frac{1}{9\omega^2} \frac{4F_0}{\pi m}$$

$$\Rightarrow x_{p2} = -\frac{1}{3} \frac{1}{g} \frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \sin 3\omega t$$

$$\ddot{x} = \frac{4F_0}{\pi m} \frac{1}{5} \sin 5\omega t \quad x_{p3} = G' \sin 5\omega t + H' \cos 5\omega t$$

$$\ddot{x}_{p3} = 5\omega G' \cos 5\omega t - 5\omega H' \sin 5\omega t \quad \ddot{x}_{p3} = -25\omega^2 G' \sin 5\omega t - 25\omega^2 H' \cos 5\omega t$$

$$\Rightarrow -25\omega^2 G' \sin 5\omega t - 25\omega^2 H' \cos 5\omega t = \frac{4F_0}{\pi m} \frac{1}{5} \sin 5\omega t$$

$$\Rightarrow H' = 0 \quad e \quad G' = -\frac{1}{5} \frac{1}{25} \frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \Rightarrow x_{p3} = -\frac{1}{5} \frac{1}{25} \frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \sin 5\omega t$$

Portanto

$$x_p = x_{p1} + x_{p2} + x_{p3} + \dots$$

$$\Rightarrow x_p = -\frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \sin \omega t - \frac{1}{3} \frac{1}{g} \frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \sin 3\omega t - \frac{1}{5} \frac{1}{25} \frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \sin 5\omega t - \dots$$

mas $x = x_p + x_h$

$$\Rightarrow x = B' + A't - \frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \sin \omega t - \frac{1}{3} \frac{1}{g} \frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \sin 3\omega t - \frac{1}{5} \frac{1}{25} \frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \sin 5\omega t - \dots$$

onde A' e B' são constantes que dependem de condições de contorno

a equação acima p/ a posição da partícula não é válida

p/ $t = \pi/\omega, 2\pi/\omega, \dots$ Portanto não podemos avaliar onde

a partícula está nestes instantes

$$a) \ddot{x} = A' - \frac{4F_0}{\pi m \omega} \cos \omega t - \frac{1}{3} \frac{4F_0}{\pi m \omega} \cos 3\omega t - \frac{1}{25} \frac{4F_0}{\pi m \omega} \cos 5\omega t - \dots$$

$$x(0) = B' = 0$$

$$\dot{x}(\pi/\omega) = A' - \frac{4F_0}{\pi m \omega} \cos \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \frac{4F_0}{\pi m \omega} \cos \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{25} \frac{4F_0}{\pi m \omega} \cos \frac{5\pi}{2} - \dots = 5$$

$$\Rightarrow A' = 5$$

$$\Rightarrow x = 5t - \frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \sin \omega t - \frac{1}{3} \frac{1}{9} \frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \sin 3\omega t - \frac{1}{5} \frac{1}{25} \frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \sin 5\omega t - \dots$$

válida p/ $\forall t$ exceto $t = \pi/\omega, 2\pi/\omega, \dots$

$$\Rightarrow x(0) = v' = 0$$

$$\dot{x}(0) = A' - \frac{4F_0}{\pi m \omega} - \frac{1}{3} \frac{4F_0}{\pi m \omega} - \frac{1}{25} \frac{4F_0}{\pi m \omega} - \dots = 3$$

$$\Rightarrow A' = 3 + \frac{4F_0}{\pi m \omega} + \frac{1}{3} \frac{4F_0}{\pi m \omega} + \frac{1}{25} \frac{4F_0}{\pi m \omega} + \dots$$

$$\Rightarrow x = \left(3 + \frac{4F_0}{\pi m \omega} + \frac{1}{3} \frac{4F_0}{\pi m \omega} + \frac{1}{25} \frac{4F_0}{\pi m \omega} + \dots \right) t - \frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \sin \omega t - \frac{1}{3} \frac{1}{9} \frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \sin 3\omega t - \dots$$

mas está errado na Questão 3 que: $1 + 1/9 + 1/25 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

$$\Rightarrow x = \left(3 + \frac{F_0 \pi}{2 m \omega} \right) t - \frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \sin \omega t - \frac{1}{3} \frac{1}{9} \frac{4F_0}{\pi m \omega^2} \sin 3\omega t - \dots \quad \text{p/ } \forall t \text{ exceto } t = \pi/\omega, 2\pi/\omega, \dots$$

OBS: caso tivéssemos definido

F como sendo zero em $t = \pi/\omega, 2\pi/\omega, \dots$
 a série de F convergia p/ F em todos os pontos visto que:
 caso F tivesse sido definida assim ou se redefiníssemos por nula conta desta maneira: então a resposta seria válida para qualquer t.

a série de F \rightarrow F (nos Ptos de continuidade de F)

$$\frac{\lim_{t \rightarrow P^-} F + \lim_{t \rightarrow P^+} F}{2} \quad (\text{nos pontos de descontinuidade})$$

sendo F descontínua

em $t = \pi/\omega, 2\pi/\omega, \dots$

então a série de Fourier convergia p/ 0

e como definimos é o valor de F nestes pontos

$$\frac{\lim_{t \rightarrow \pi/\omega^-} F + \lim_{t \rightarrow \pi/\omega^+} F}{2} = \frac{\lim_{t \rightarrow 2\pi/\omega^-} F + \lim_{t \rightarrow 2\pi/\omega^+} F}{2} = \dots$$

Questão 2: determine $x(t)$ tal que:

$$x'' - 2x' + x = te^t + 4 \quad x(0) = 1 \quad x'(0) = 1$$

Solução:

homogênea: $x'' - 2x' + x = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Rightarrow x_h = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

$$x'' - 2x' + x = 4$$

Vamos tentar $x_{p1} = A \Rightarrow x'_{p1} = x''_{p1} = 0$

$$\Rightarrow A = 4 \Rightarrow x_{p1} = 4$$

$$x'' - 2x' + x = te^t$$

Vamos tentar $x_{p2} = (B+ct)e^t$ mas existe solução desta que é solução da homogênea $\Rightarrow x_{p2} = (B+ct)t e^t$ mas continua o mesmo problema

$$\Rightarrow x_{p2} = (B+ct)t^2 e^t$$

$$\Rightarrow \dot{x}_{p2} = c t^2 e^t + (2t e^t + t^2 c e^t)(B+ct) = (B+3c)t^2 e^t + c t^3 e^t + 2t B e^t$$

$$\ddot{x}_{p2} = (B+3c)(2t e^t + t^2 c e^t) + c(3t^2 e^t + t^3 c e^t) + 2B(e^t + t e^t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_{p2} = 2B e^t + B t^2 e^t + 6c t e^t + 3c t^2 e^t + 3c t^2 e^t + c t^3 e^t + 2B e^t + 2B t e^t$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_{p2} = (4B+6c)t e^t + (6c+B)t^2 e^t + c t^3 e^t + 2B e^t$$

fazendo na equação:

$$(4B+6c)t e^t + (6c+B)t^2 e^t + c t^3 e^t + 2B e^t - 2(B+3c)t e^t - 2c t^3 e^t - 4t B e^t + t^2 e^t + c t^3 e^t = t e^t$$

$$6c t e^t + 2B e^t = t e^t$$

$$\Rightarrow B = 0$$

$$c = 1/6$$

$$\Rightarrow x_{p2} = \frac{t^3 e^t}{6}$$

$$\Rightarrow x_p = \frac{t^3 e^t}{6} + 4 \quad \text{e} \quad x = x_h + x_p = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{t^3 e^t}{6} + 4$$

mas $x(0) = C_1 + 4 = 1 \Rightarrow C_1 = -3$

$$x' = C_1 e^t + C_2 e^t + C_2 t e^t + \frac{3t^2 e^t + t^3 e^t}{6}$$

$\Rightarrow x'(0) = -3 + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 4$

$\Rightarrow x = -3e^t + 4te^t + \frac{t^3 e^t}{6} + 4$



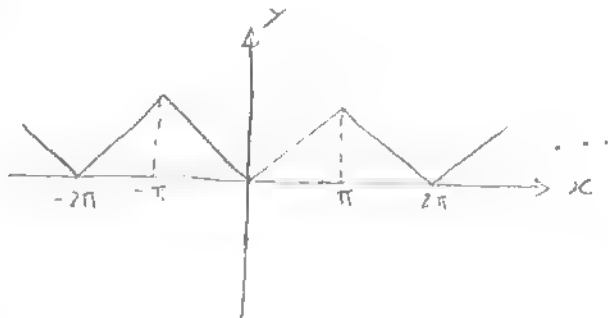
Questão 3: considere a função periódica f , de período 2π definida por $f(x) = |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

2) Determine a série de Fourier de f .

1) usando o primeiro item mostre que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

3) usando Parseval calcule $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$

Solução.



está claro que f é uma função par então já podemos escrever:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad \text{onde } l \text{ é o semi-período}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{\pi a_n}{2} = \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

P/ $n = 0 \Rightarrow \frac{\pi a_0}{2} = \frac{\pi^2}{2} \Rightarrow a_0 = \pi$

P/ $n = 1, 2, \dots \Rightarrow$

$$\frac{\pi a_n}{2} = \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \left[\frac{x}{n} \sin nx - \int \frac{\sin nx}{n} \, dx \right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi a_n}{2} = \left[\frac{x}{n} \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_0^{\pi} = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2}$$

mas $\cos n\pi = (-1)^n$

$$\Rightarrow \frac{\pi a_n}{2} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \Rightarrow a_n = \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi n^2}$$

mas $a_{2k} = 0$

$a_{2k-1} = \frac{-4}{\pi(2k-1)^2}$ com $k = 1, 2, \dots$

Logo a série de Fourier de f será: $\frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} \cos[(2k-1)x] =$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos[(2k-1)x]}{(2k-1)^2}$$

Como f é contínua em todos os pontos (verifique) então podemos escrever para todo x que:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos[(2k-1)x]}{(2k-1)^2}$$

Y $x=0$ na equação anterior temos:

$$f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \quad \text{mas } f(0) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \left(\text{usamos este resultado da Questão 1} \right)$$

$$\text{Parseval} \Rightarrow \frac{1}{l} \int_{-l}^l [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$[f(x)]^2 \text{ é Par} \Rightarrow \int_{-l}^l [f(x)]^2 dx = 2 \int_0^l [f(x)]^2 dx$$

$$n=0 \quad \text{p/ } n=1, 2, \dots \quad \text{e } l=\pi$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 (2k-1)^4}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi} \frac{1}{3} \pi^3 = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}$$

$$\frac{2}{3} \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} = \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Questão 4 . Esta questão serve para enfatizar de que modo uma função

f não é contínua num ponto sua série de Fourier

converge para $\frac{\lim_{x \rightarrow P^-} f + \lim_{x \rightarrow P^+} f}{2}$ e não para f

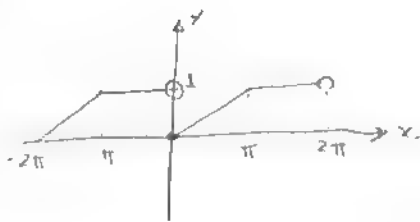
considere a função periódica de período 2π que em $[-\pi, \pi)$

está definida por
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -\pi \leq x < 0 \\ x/\pi & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

e seja $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ a sua série de Fourier

então calcule $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Solução



$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 1 \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x}{\pi} \, dx = \frac{3}{2}$$

em $x = 0$ f é descontínua (verifique)

a série de Fourier de f é $\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

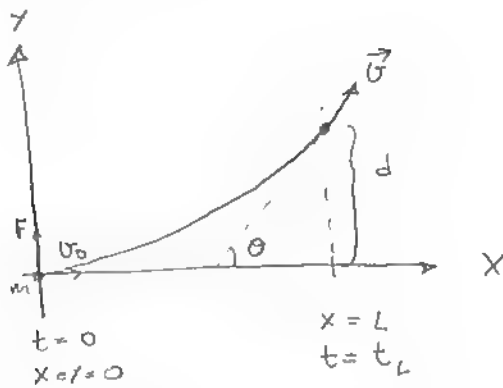
para $x = 0$ a série de Fourier é $\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

mas $\frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é igual a $\frac{\lim_{x \rightarrow 0^-} f + \lim_{x \rightarrow 0^+} f}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ e não a $f(0)$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$



7.69) Alonso PG 187

secho $m = \text{cte} \Rightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$$\vec{F} = F \vec{j} \quad \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \int_0^t \vec{a} dt = \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v}$$

$$\text{mas } \vec{F} = \text{cte} \Rightarrow \vec{a} = \text{cte} \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{F}}{m} t \quad \text{mas } \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} \\ \vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$$

$$v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = v_0 \vec{i} + \frac{\vec{F}}{m} t \vec{j}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \Rightarrow \text{P/ cualquier } t & v_x = v_0 = \text{cte} \\ v_y = \frac{F}{m} t \end{cases}$$

$$\text{P/ un instante cualquier} \Rightarrow \alpha = \arctg \frac{F t}{m v_0}$$

$$v_x = v_0 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow t_L = \frac{L}{v_0} \Rightarrow \theta = \arctg \frac{F L}{m v_0^2}$$

$$v_y = \frac{F}{m} t = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_0^d dy = \int_0^{L/v_0} \frac{F}{m} t dt$$

$$\Rightarrow d = \frac{F L^2}{2 m v_0^2}$$

P/ 2: grau

na direção x não existe força $\Rightarrow x = v_0 t$ (M.U.)

$$L = v_0 t_L \Rightarrow t_L = \frac{L}{v_0}$$

na direção y $F = \text{cte} \Rightarrow a = \text{cte} \Rightarrow \text{M.U.V.}$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} a t^2 \quad a = \frac{F}{m} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$$

$$\Rightarrow d = \frac{F}{2m} \frac{L^2}{v_0^2}$$

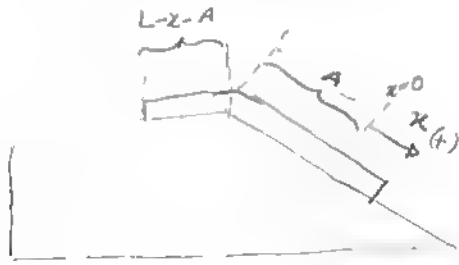
$$v_y = at = \frac{F}{m} t$$

$$\Rightarrow \alpha = \arctg \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \alpha = \arctg \frac{F t}{m v_0}$$

$$\text{P/ } t = t_L \Rightarrow \theta = \arctg \frac{F L}{m v_0^2}$$

7.78 ALONSO Pg 188

Para um instante qualquer posterior ao início do movimento observe o esquema:



mudamos a notação
do livro de a para A

e temos.

$$\frac{W}{g} \text{ --- } L$$

$$\frac{P}{g} \text{ --- } A+x \Rightarrow P = \frac{W}{L} (A+x)$$

$$\Rightarrow \frac{W}{L} (A+x) \sin \alpha = \frac{W}{g} a$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \left(\frac{dx}{dt} \right) = v \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow \int_0^v v \frac{dv}{dx} = \int_0^{L-A} \frac{W}{L} (A+x) \sin \alpha$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{g \sin \alpha}{L} (L^2 - A^2)}$$

Para a aceleração neste instante podemos escrever:

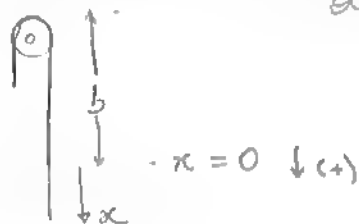
$$\underbrace{M - L}_{M' = \frac{2}{3}L} \Rightarrow M' = \frac{2}{3}M \Rightarrow M'' = 1 - M' = \frac{1}{3}M \quad \text{e temos:}$$

já que a corda é uniforme!

$$\frac{2}{3}Mg - \frac{1}{3}Mg = Ma \Rightarrow a = \frac{1}{3}g$$

cálculo da velocidade:

Para um instante qualquer depois do início do movimento descreve o esquema:



$$\Rightarrow \underbrace{M - L}_{M_D = b+x} \Rightarrow M_D = \frac{M}{L}(b+x) \quad \text{e} \quad M_E = 1 - M_D = \frac{M}{L}(L-b-x)$$

e temos $\frac{M}{L}(b+x) - \frac{M}{L}(L-b-x) = M \frac{a}{g}$

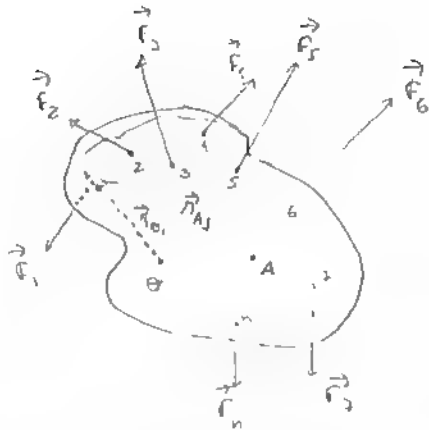
$$\Rightarrow \frac{a}{g} = \frac{2x + 2b - L}{L} \quad \text{mas} \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

$$\Rightarrow v \frac{dv}{dx} = \frac{g}{L}(2x + 2b - L) \quad \text{ou} \quad \int_0^v v dv = \frac{g}{L} \int_0^{2L-b} (2x + 2b - L) dx$$

$$\Rightarrow v = \left[\frac{2g}{L} \left(\frac{7}{3}bL - \frac{2}{9}L^2 - 3b^2 \right) \right]^{1/2} \quad \text{válida é claro para } b < \frac{2}{3}L.$$

Obs. - O fato de que o raio do pino seja muito pequeno \Rightarrow que podemos considerar que o comprimento do lado esquerdo + lado direito = L / o comprimento $\ll L$.

4.20



(só colocamos um corpo P/

facilitar o raciocínio, mas observe que em instante nenhum do desenvolvimento levamos em conta isso, ou seja o sistema de forças pode estar "livre" no espaço.)

$$\vec{r}_{\theta} = \vec{r}_{\theta 1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{\theta 2} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{\theta n} \times \vec{F}_n$$

$$\vec{r}_{A} = \vec{r}_{A1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{A2} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{An} \times \vec{F}_n$$

mas $\vec{r}_{A\theta} + \vec{r}_{\theta i} = \vec{r}_{Ai}$

$$\Rightarrow \vec{r}_A = (\vec{r}_{A\theta} + \vec{r}_{\theta 1}) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_{A\theta} + \vec{r}_{\theta 2}) \times \vec{F}_2 + \dots + (\vec{r}_{A\theta} + \vec{r}_{\theta n}) \times \vec{F}_n$$

$$\Rightarrow \vec{r}_A = \vec{r}_{A\theta} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{\theta 1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{A\theta} \times \vec{F}_2 + \vec{r}_{\theta 2} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{A\theta} \times \vec{F}_n + \vec{r}_{\theta n} \times \vec{F}_n$$

$$\Rightarrow \vec{r}_A = (\vec{r}_{\theta 1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{\theta 2} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{\theta n} \times \vec{F}_n) + \vec{r}_{A\theta} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n)$$

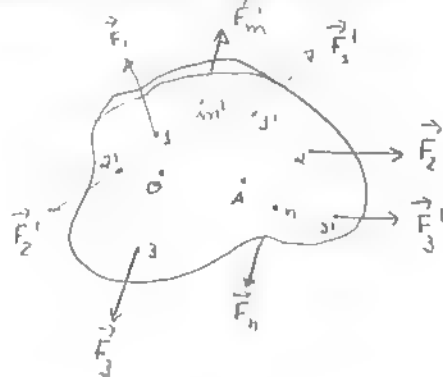
as forças concorrem num ponto \Rightarrow

$$\Rightarrow \vec{r}_A = \vec{r}_{\theta} + \vec{r}_{A\theta} \times \vec{R}$$

Questão: mostre que se dois sistemas de forças são equivalentes em relação a um ponto então são equivalentes em qualquer outro ponto.

SOLUÇÃO

Para facilitar, vamos observar um corpo submetido a dois sistemas de forças:



Sistema $S(\vec{F}_1; \vec{F}_2; \dots; \vec{F}_n)$

Sistema $S'(\vec{F}_1'; \vec{F}_2'; \dots; \vec{F}_m')$

com as forças aplicadas nos pontos indicados.

Imagine que os dois sistemas são equivalentes em \underline{O} , vamos mostrar que eles são também equivalentes em um ponto arbitrário \underline{A} .

Estudo P/ o Ponto \underline{O} :

$$S: \vec{R}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n; \quad \vec{M}_O = \vec{r}_{O1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{O2} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{On} \times \vec{F}_n$$

$$S': \vec{R}_O' = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \dots + \vec{F}_m'; \quad \vec{M}_O' = \vec{r}_{O1'} \times \vec{F}_1' + \vec{r}_{O2'} \times \vec{F}_2' + \dots + \vec{r}_{Om'} \times \vec{F}_m'$$

mas os sistemas são equivalentes em $\underline{O} \Rightarrow \vec{R}_O = \vec{R}_O' \quad (I)$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O' \quad (II)$$

Estudo P/ o Ponto \underline{A} :

$$S: \vec{R}_A = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n; \quad \vec{M}_A = \vec{r}_{A1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{A2} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{An} \times \vec{F}_n$$

$$S': \vec{R}_A' = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \dots + \vec{F}_m'; \quad \vec{M}_A' = \vec{r}_{A1'} \times \vec{F}_1' + \vec{r}_{A2'} \times \vec{F}_2' + \dots + \vec{r}_{Am'} \times \vec{F}_m'$$

está claro que a resultante P/ os sistemas S e S' não se alteram. Por isso observamos $(\vec{R}_A = \vec{R}_O = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n)$ se não estiver claro ver observação $(\vec{R}_A' = \vec{R}_O' = \vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \dots + \vec{F}_m')$ feita no § 3.44 do Beer

DE (I) fica claro então que:

$$\vec{R}_A = \vec{R}_A'$$

agora só falta mostrarmos que $\vec{M}_A = \vec{M}_A'$ p/ que o problema esteja resolvido.

Observe que podemos escrever:

$$\begin{cases} \vec{r}_{\theta A} + \vec{r}_{Ai} = \vec{r}_{\theta i} & \text{(III)} \\ \vec{r}_{\theta A} + \vec{r}_{Ai'} = \vec{r}_{\theta i'} & \text{(IV)} \end{cases} \quad \text{(III) - (IV)} \Rightarrow \vec{r}_{Ai} - \vec{r}_{Ai'} = \vec{r}_{\theta i} - \vec{r}_{\theta i'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{Ai'} = \vec{r}_{Ai} + \vec{r}_{\theta i'} - \vec{r}_{\theta i} \quad \text{(V)}$$

jogando (V) em \vec{M}_A' temos:

$$\vec{M}_A' = (\vec{r}_{A1} + \vec{r}_{\theta 1'} - \vec{r}_{\theta 1}) \times \vec{F}_1' + (\vec{r}_{A2} + \vec{r}_{\theta 2'} - \vec{r}_{\theta 2}) \times \vec{F}_2' + \dots + (\vec{r}_{An} + \vec{r}_{\theta n'} - \vec{r}_{\theta n}) \times \vec{F}_n' \Rightarrow$$

$$\vec{M}_A' = (\vec{r}_{A1} \times \vec{F}_1' + \vec{r}_{\theta 1'} \times \vec{F}_1' - \vec{r}_{\theta 1} \times \vec{F}_1') + (\vec{r}_{A2} \times \vec{F}_2' + \vec{r}_{\theta 2'} \times \vec{F}_2' - \vec{r}_{\theta 2} \times \vec{F}_2') + \dots + (\vec{r}_{An} \times \vec{F}_n' + \vec{r}_{\theta n'} \times \vec{F}_n' - \vec{r}_{\theta n} \times \vec{F}_n')$$

$$\Rightarrow \vec{M}_A' = \vec{r}_{A1} \times \vec{F}_1' + \vec{r}_{A2} \times \vec{F}_2' + \dots + \vec{r}_{An} \times \vec{F}_n' - \vec{r}_{\theta 1} \times \vec{F}_1' - \vec{r}_{\theta 2} \times \vec{F}_2' - \dots - \vec{r}_{\theta n} \times \vec{F}_n' + \underbrace{\vec{r}_{\theta 1'} \times \vec{F}_1' + \vec{r}_{\theta 2'} \times \vec{F}_2' + \dots + \vec{r}_{\theta n'} \times \vec{F}_n'}_{\text{de (II) } \vec{M}_{\theta}' = \vec{M}_{\theta}}$$

mas com (II) e (III) podemos escrever:

$$\Rightarrow \vec{M}_A' = (\vec{r}_{\theta 1} - \vec{r}_{\theta A}) \times \vec{F}_1' + (\vec{r}_{\theta 2} - \vec{r}_{\theta A}) \times \vec{F}_2' + \dots + (\vec{r}_{\theta n} - \vec{r}_{\theta A}) \times \vec{F}_n' - \vec{r}_{\theta 1} \times \vec{F}_1' - \vec{r}_{\theta 2} \times \vec{F}_2' - \dots - \vec{r}_{\theta n} \times \vec{F}_n' + \vec{r}_{\theta 1'} \times \vec{F}_1' + \vec{r}_{\theta 2'} \times \vec{F}_2' + \dots + \vec{r}_{\theta n'} \times \vec{F}_n'$$

escrevendo vamos encontrar:

$$\vec{M}_A' = -\vec{r}_{\theta A} \times (\vec{F}_1' + \vec{F}_2' + \dots + \vec{F}_n') + \vec{r}_{\theta 1} \times \vec{F}_1' + \vec{r}_{\theta 2} \times \vec{F}_2' + \dots + \vec{r}_{\theta n} \times \vec{F}_n'$$

$$\text{mas } \vec{R}_A = \vec{R}_A' \Rightarrow \vec{M}_A' = -\vec{r}_{\theta A} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) + \vec{r}_{\theta 1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{\theta 2} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{\theta n} \times \vec{F}_n$$

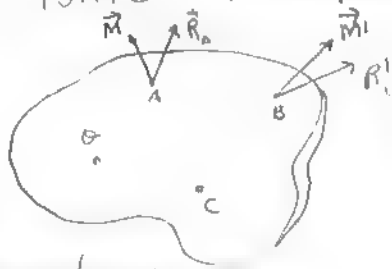
$$\Rightarrow \vec{M}_A' = (\vec{r}_{\theta 1} - \vec{r}_{\theta A}) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_{\theta 2} - \vec{r}_{\theta A}) \times \vec{F}_2 + \dots + (\vec{r}_{\theta n} - \vec{r}_{\theta A}) \times \vec{F}_n$$

$$\text{mas de (III)} \Rightarrow \vec{M}_A' = \vec{r}_{A1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{A2} \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_{An} \times \vec{F}_n \Rightarrow \boxed{\vec{M}_A' = \vec{M}_A}$$

Observe que A é um ponto qualquer
 para este problema podemos escolher qualquer ponto A, só o colocamos para mostrar

solução alternativa mais simples

Como sabemos qualquer sistema de forças pode ser substituído por uma força e um binário em um dado ponto logo imagine que reduzimos o sistema S por uma força e um binário no ponto A e o sistema S' por uma força e um binário no ponto B . Conforme a figura abaixo.



\vec{M} e \vec{R} representam o sistema S já reduzido em

\vec{M}' e \vec{R}' representam o sistema S' já reduzido em

Como S e S' não equivalerem em relação a C podemos escrever

$$\vec{R}_C = \vec{R}'_C = \vec{R}_A = \vec{R}'_B = \vec{R} \quad (I)$$

$$\vec{L}_{OA} \times \vec{R}_A + \vec{M} = \vec{L}_{OB} \times \vec{R}'_B + \vec{M}'$$

$$\text{mas de (I)} \Rightarrow \vec{L}_{OA} \times \vec{R} + \vec{M} = \vec{L}_{OB} \times \vec{R} + \vec{M}' \quad (II)$$

Estudo Pl o Ponto C :

sistema S : $\vec{R}_C = \vec{R}$ (daqui por diante vamos escrever \vec{R} em vez de \vec{R}_B pois é a mesma coisa)

$$\vec{M}_C = \vec{L}_{CA} \times \vec{R} + \vec{M}$$

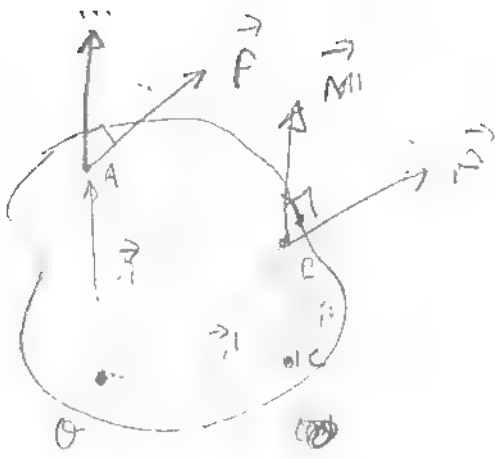
$$\text{Sistema } S': \vec{R}'_C = \vec{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{mas } \vec{L}_{CB} + \vec{L}_{BA} = \vec{L}_{CA} \\ \vec{M}'_C = \vec{L}_{CB} \times \vec{R} + \vec{M}' \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \vec{M}'_C = (\vec{L}_{CA} - \vec{L}_{BA}) \times \vec{R} + \vec{M}' = \vec{L}_{CA} \times \vec{R} - \vec{L}_{BA} \times \vec{R} + \vec{M}' \quad \text{mas } \vec{L}_{OB} + \vec{L}_{BA} = \vec{L}_{OA}$$

$$\Rightarrow \vec{M}'_C = \vec{L}_{CA} \times \vec{R} - (\vec{L}_{OA} - \vec{L}_{OB}) \times \vec{R} + \vec{M}' \Rightarrow \vec{M}'_C = \vec{L}_{CA} \times \vec{R} - \vec{L}_{OA} \times \vec{R} + \vec{L}_{OB} \times \vec{R} + \vec{M}'$$

$$\text{mas de (II) temos que: } \vec{M} = \vec{L}_{OB} \times \vec{R} - \vec{L}_{OA} \times \vec{R} + \vec{M}' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{M}'_C = \vec{L}_{CA} \times \vec{R} + \vec{M} = \vec{M}_C \quad \text{como queríamos mostrar}$$



$$\vec{r}' + \vec{r}_{BA} = \vec{r}'''$$

$$\vec{r}' + \vec{r}_{BA} = \vec{r}$$

$$\boxed{\vec{r}''' + \vec{r} - \vec{r}' - \vec{r}_{BA}}$$

$$\vec{r} \times \vec{F} + \vec{M}$$

$$\textcircled{<} \left. \begin{array}{l} \vec{r} \times \vec{F} + \vec{M} \\ \vec{r}' \times \vec{F} + \vec{M}' \end{array} \right\} \vec{r} + \vec{M} = \vec{r}' + \vec{F} + \vec{r}$$

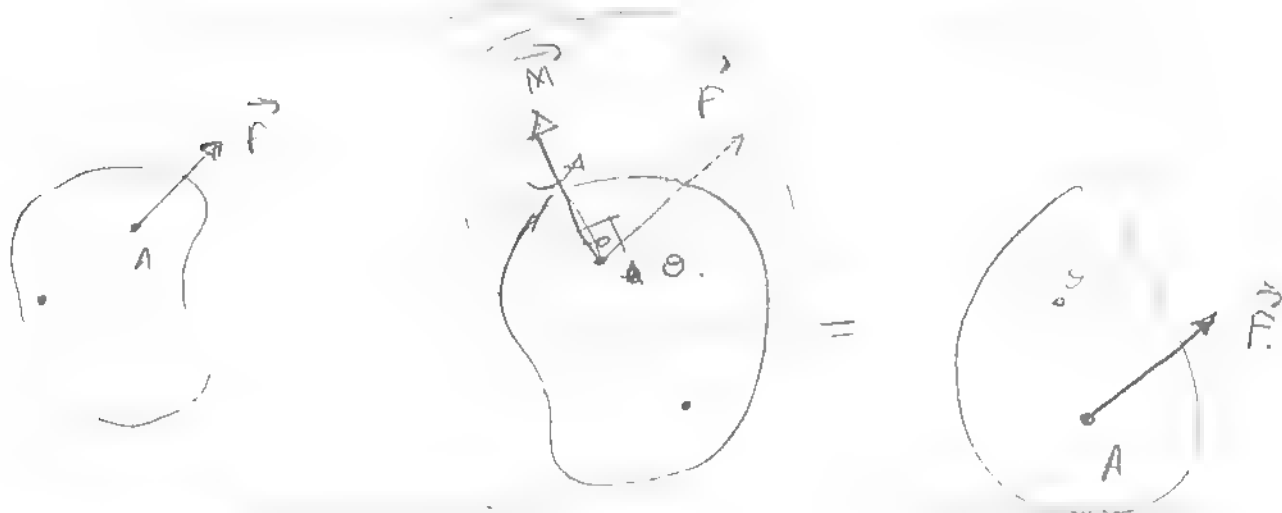
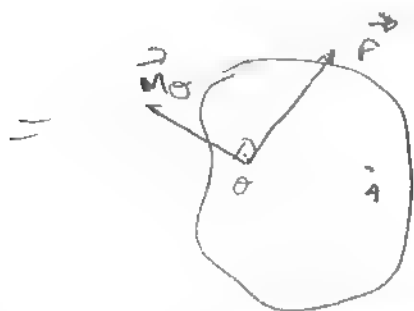
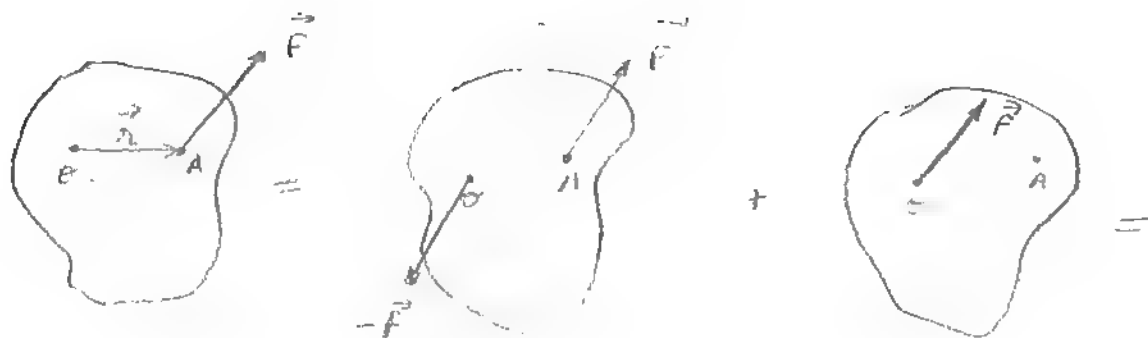
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} + \vec{M}' - \vec{r}' \times \vec{F}$$

$$\vec{r}''' \times \vec{F} + \vec{M}''$$

$$\vec{r}''' \times \vec{F} + \vec{M}''$$

$$\textcircled{<} (\vec{r}''' + \vec{r}' - \vec{r}) \times \vec{F} + \vec{M}'' = \vec{r}''' \times \vec{F} + (\vec{r}' - \vec{r}) \times \vec{F} + \vec{M}'' =$$

$$= \vec{r}''' \times \vec{F} + \underbrace{\vec{r}' \times \vec{F} - \vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{M}} + \vec{M}''$$

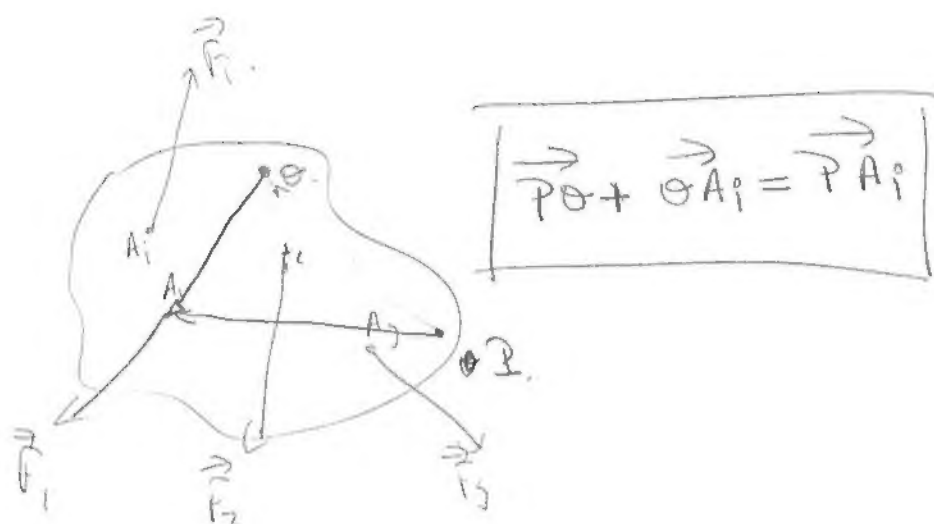


$$\vec{M}' = \vec{r}' \times \vec{F}$$



$$\vec{M} + \vec{r}'' \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times \vec{F} + \vec{r}'' \times \vec{F} = (\vec{r} + \vec{r}'') \times \vec{F}$$



$$\sum_{i=1}^N \vec{l}_{iP} = \vec{\sigma} A_1 \times \vec{F}_1 + \vec{\sigma} A_2 \times \vec{F}_2 + \vec{\sigma} A_3 \times \vec{F}_3 + \dots + \vec{\sigma} A_N \times \vec{F}_N = \vec{0}.$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{l}_{iP} = \vec{r} A_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r} A_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r} A_3 \times \vec{F}_3 + \dots + \vec{r} A_N \times \vec{F}_N =$$

$$= (\vec{r}_O + \vec{\sigma} A_1) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_O + \vec{\sigma} A_2) \times \vec{F}_2 + (\vec{r}_O + \vec{\sigma} A_3) \times \vec{F}_3 + \dots + (\vec{r}_O + \vec{\sigma} A_N) \times \vec{F}_N =$$

$$= \vec{r}_O \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N) = \vec{0}.$$

$$\underbrace{\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N}_{\vec{R} = \vec{0}} = \vec{0}.$$

